

the emants of real analysis, second edition (1976)

by el Robert G.bartle · Language: FR

Summary by booksummaryai.com —

<https://booksummaryai.com/country/fr/the-emants-of-real-analysis-second-edition-1976-resume>

Summary

En 60 secondes

Bartle part de onze axiomes et d'un axiome supplémentaire — la complétude — qui distingue les nombres réels de tout autre système de nombres moins puissant. De cette seule propriété, il tire la règle archimédienne, la densité des rationnels, la convergence des suites monotones et le théorème de Bolzano-Weierstrass. Limites, continuité, dérivées et intégrale de Riemann reçoivent chacun une définition en ϵ - δ et un théorème que vous pouvez prouver de vos propres mains. Le livre se clôt sur les suites de fonctions, là où la convergence simple échoue et où la convergence uniforme sauve la mise.

Pourquoi le lire

C'est le livre qui transforme le calcul différentiel et intégral, d'un sac de trucs, en une discipline qui a ses raisons. Chaque théorème dont vous vous souvenez vaguement de votre première année — le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis, le théorème fondamental de l'analyse — reçoit ici une vraie démonstration, bâtie sur la complétude. Lisez-le si vous êtes étudiant en mathématiques qui aborde l'analyse, enseignant qui veut savoir pourquoi les règles tiennent, ou autodidacte qui refuse de se contenter d'un « on démontre que ».

Les idées clés

Onze axiomes et celui qui compte le plus

Vous ouvrez le livre et découvrez le système des nombres réels $\mathbb{R}$ comme un corps avec addition et multiplication satisfaisant 11 axiomes. Puis Bartle ajoute l'axiome qui change tout — la complétude, la garantie que tout ensemble non vide borné supérieurement possède une borne supérieure (supremum). De là il démontre la Propriété d'Archimède : si $x > 0$ et y est un nombre réel quelconque, il existe un entier naturel n tel que $nx > y$. Si petit que soit x , suffisamment de copies de lui dépassent n'importe quel y . Il encaisse immédiatement ce résultat pour en obtenir un second : entre deux nombres réels quelconques il existe un nombre rationnel, en utilisant la propriété d'Archimède pour trouver un dénominateur n avec $1/n < b - a$.

La complétude est le mur porteur de l'analyse. Les onze axiomes de corps et d'ordre décrivent l'arithmétique et la taille, mais ils valent tout autant pour les rationnels, où des suites comme le développement décimal de 2 n'ont pas de limite. L'axiome du supremum est ce qui fait exister les limites, et la Propriété d'Archimède en est le premier dividende : elle convertit « arbitrairement petit » en un dénominateur concret que vous pouvez chasser. Quand vous démontrerez plus tard que les limites sont uniques ou que les intégrales existent, vous vous appuyez discrètement sur ce chapitre.

À essayer: Prenez deux nombres réels, disons $a = 1.4142$ et $b = 1.4143$, et trouvez effectivement un rationnel entre eux en utilisant l'astuce d'Archimède : choisissez n avec $1/n < b - a$, puis repérez un entier m avec $a < m/n < b$.

Monotone, bornée, terminé : votre premier théorème de convergence

Le chapitre 2 vous offre le test de convergence le moins cher du livre. Une suite monotone croissante qui est bornée supérieurement converge vers son supremum (et une suite décroissante bornée converge vers son infimum). Puis les enjeux montent. Le chapitre introduit les sous-suites et démontre le Théorème de Bolzano-Weierstrass via la propriété des intervalles emboîtés : toute suite bornée dans $\mathbb{R}$, si chaotique soit-elle, cache en son sein une sous-suite convergente. Enfin vient le Critère de Cauchy pour la convergence : une suite est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy, en utilisant la complétude des réels.

Ces trois résultats forment une boîte à outils que vous utiliserez pour le reste du livre. Le Théorème de Convergence Monotone vous permet de prouver la convergence sans connaître la limite—bornéez simplement la suite et laissez le supremum faire le travail. Bolzano-Weierstrass est le principe d'extraction : de n'importe quel chaos borné, tirez un fil bien comporté. Le Critère de Cauchy compte le plus quand la limite est inconnue ou vit dans un espace que vous ne pouvez voir directement ; il teste la convergence en n'utilisant que les termes eux-mêmes. Les trois sont la complétude portant des vêtements différents.

À essayer: Prenez la suite $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$. Montrez qu'elle est monotone après le premier ou deuxième terme, bornez-la supérieurement par 2, et concluez qu'elle converge—sans jamais calculer sa limite.

ε - δ : la définition qui met fin aux devinettes

Bartle met sur la table la définition ε - δ d'une limite : f a pour limite L en c si pour tout $\varepsilon > 0$ vous pouvez trouver $\delta > 0$ de sorte que x proche de c force $f(x)$ proche de L . L'exemple $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ pour $x \neq 1$ a pour limite 2 quand x approche 1 malgré le fait qu'il soit indéfini en 1.

La définition ε - δ renverse la dynamique de pouvoir d'un cours de calcul. Au lieu de « s'approche de », qui signifie ce que le lecteur veut, elle exige un jeu de défi quantifié : votre adversaire choisit ε , vous répondez avec δ . Si vous pouvez toujours répondre, la limite existe. C'est pourquoi les discontinuités amovibles et les trous ne bloquent pas les limites, et pourquoi la même machinerie définit plus tard la continuité en exigeant simplement que la limite égale $f(c)$.

À essayer: Démontrez $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ avec la définition : étant donné ε , exhibez $\delta = \varepsilon/3$ et vérifiez l'implication $|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 7| < \varepsilon$.

La continuité, assemblée à partir des limites

La continuité reçoit sa forme précise : f est continue en c si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - c| < \delta$, alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. On démontre que les sommes, produits et quotients (lorsque le dénominateur est non nul) de fonctions continues sont continus. La récompense arrive sous la forme de trois théorèmes. Le théorème des valeurs intermédiaires est énoncé : si f est continue sur $[a, b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = k$, démontré à l'aide de la borne supérieure de l'ensemble $\{x : f(x) \leq k\}$. Le théorème du bornage est démontré : une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée sur cet intervalle. Le théorème des bornes atteintes (théorème des valeurs extrêmes) est démontré : une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses valeurs maximale et minimale, en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

« Fermé et borné » est la formule magique de ce chapitre. Les démonstrations montrent pourquoi la complétude gagne sa vie ici — le théorème des valeurs intermédiaires fait surgir le point c d'une borne supérieure, et le théorème des valeurs extrêmes récolte une sous-suite convergente grâce à Bolzano-Weierstrass. La continuité seule est une condition locale ; c'est la compacité de $[a, b]$ qui la transforme en un contrôle global.

À essayer: Montrez que $f(x) = 1/x$ sur $(0, 1]$ est continue mais non bornée, puis expliquez précisément quelle hypothèse du théorème du bornage fait défaut.

La dérivée, définie honnêtement

La dérivée d'une fonction f en un point c est définie par $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c))/h$, si la limite existe, et on démontre que la dérivabilité implique la continuité. Puis vient la pièce maîtresse du chapitre. Le théorème de Rolle est démontré : si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) , et si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans (a, b) tel que $f'(c) = 0$. Le théorème des accroissements finis est ensuite démontré : si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) , alors il existe c dans (a, b) tel que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$, en utilisant le théorème de Rolle. La règle de L'Hospital (pour la forme indéterminée $0/0$) est énoncée et démontrée à l'aide du théorème des accroissements finis de Cauchy, avec l'exemple $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$, bien que la démonstration utilise la dérivée de $\sin$ en 0.

Le théorème des accroissements finis est le pont entre le local et le global : il convertit une information sur une dérivée en un point inconnu en un énoncé sur la variation moyenne sur un intervalle entier. Presque chaque fait sur les dérivées que vous utilisez — tests de monotonie, bornes d'erreur pour les approximations — est le théorème des accroissements finis déguisé. La règle de L'Hospital n'est pas une définition mais un théorème avec des hypothèses, et sa démonstration via le théorème des accroissements finis de Cauchy montre pourquoi la règle exige la dérivabilité au voisinage du point, et pas seulement en ce point.

À essayer: Utilisez le théorème des accroissements finis pour démontrer que $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ pour tous réels a, b , en identifiant le point c dont le théorème garantit l'existence.

L'intégrale de Riemann, construite à partir des partitions

Le chapitre 6 construit l'intégrale à partir de ses éléments nus. Une partition P de $[a, b]$ est un ensemble fini de points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; sa norme est $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$; une somme de Riemann est $S(f; P) = \sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ pour des points t_i dans $[x_{i-1}, x_i]$; et f est intégrable au sens de Riemann s'il existe L tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et tout choix de points, $|S(f; P) - L| < \varepsilon$. On démontre qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann. Puis le théorème fondamental de l'analyse est démontré dans ses deux parties : si F est dérivable sur $[a, b]$ et si $F' = f$ est intégrable sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$; et si f est continue sur $[a, b]$, alors $F(x) = \int_a^x f$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$.

La définition fondée sur les points d'évaluation est plus robuste que celle que vous avez vue en calcul : elle exige que TOUTES les sommes de Riemann avec des partitions assez fines tombent près de L , peu importe où se trouvent les points d'évaluation. C'est pourquoi le théorème « continue implique intégrable » est un vrai contenu — les points d'évaluation pourraient conspirer pour échantillonner les pires points, et la continuité est précisément ce qui les en empêche. Les deux parties du théorème fondamental pointent dans des directions opposées : l'une évalue les intégrales via les primitives, l'autre fabrique des dérivées à partir des intégrales. Ensemble, elles disent que dérivation et intégration sont des opérations inverses, sous des hypothèses qui méritent d'être vérifiées.

À essayer: Calculez une somme de Riemann pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ en utilisant la partition $\{0, 1/4, 1/2, 1\}$ avec les points d'évaluation aux extrémités gauches, et comparez-la à la valeur exacte $1/3$.

Quand les limites de fonctions vous trahissent

Ici, le livre vous montre un échec. L'exemple $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ est donné, qui converge ponctuellement vers 0 pour $x < 1$ et vers 1 en $x = 1$, mais pas uniformément. La réparation est la convergence uniforme, définie comme : (f_n) converge uniformément vers f sur A si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x dans A , $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. On démontre que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, et que la convergence uniforme permet d'intervertir limite et intégrale. Pour les séries, le critère de Weierstrass (M-Test) pour la convergence uniforme de séries est énoncé : si $|f_n(x)| \leq M_n$ pour tout x dans A et $\sum M_n$ converge, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A . L'exemple de la série $\sum x^n/n^2$ sur $[0, 1]$ est donné, qui converge uniformément par le critère avec $M_n = 1/n^2$, puisque $\sum 1/n^2$ converge.

La convergence ponctuelle laisse chaque point converger à son propre rythme ; la convergence uniforme impose un rythme unique pour tous. Ce rythme partagé est ce qui permet d'intervertir limites avec continuité et intégration — le ε qui fonctionne en un point fonctionne partout. Le critère de Weierstrass est le cheval de bataille car il ramène une question sur les fonctions à une

question sur les nombres, une série qu'on peut vérifier avec le critère de comparaison. Gardez l'exemple x^n en tête : c'est le rappel canonique qu'une limite d'objets sympathiques n'est pas nécessairement sympathique.

À essayer: Pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1/2]$, trouvez un $N(\epsilon)$ explicite qui fonctionne pour tout x à la fois, et confirmez que la convergence y est uniforme alors qu'elle échoue sur $[0,1]$.

Séries entières et leur rayon de confiance

Le dernier chapitre traite des polynômes infinis. Le rayon de convergence R est défini à l'aide de la formule de Cauchy-Hadamard : $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. On démontre qu'une série entière peut être dérivée terme à terme dans son intervalle de convergence, et que le rayon de convergence de la dérivée est le même.

La dérivation terme à terme est le résultat qui justifie de traiter les séries entières comme des polynômes, et il est loin d'être évident : les séries de fonctions générales ne peuvent pas être dérivées terme à terme sans hypothèses supplémentaires. La formule de Cauchy-Hadamard mérite qu'on s'y attarde car elle utilise la $\limsup$, l'outil du Chapitre 2 — lorsque les limites ordinaires de $|a_n|^{1/n}$ peuvent ne pas exister, la $\limsup$ détermine néanmoins R exactement. L'égalité des rayons d'une série et de sa dérivée explique aussi pourquoi des fonctions comme e^x ont des séries qui convergent partout : la dérivation ne rétrécit jamais le domaine de confiance.

À essayer: Appliquez la formule de Cauchy-Hadamard à $\sum x^n/n!$ en calculant $\limsup (1/n!)^{1/n} = 0$, et concluez $R = \infty$; puis dérivez la série terme à terme pour retrouver la même série.

Les meilleures citations

- si $x > 0$ et y est un réel quelconque, il existe un entier naturel n tel que $nx > y$
- " $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c))/h$ "
- " $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ "
- $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$

Limites

Le livre porte la marque de son époque : les exercices et la prose supposent une aisance dans la manipulation formelle, et les lecteurs en quête d'images, d'applications ou d'une motivation expliquant pourquoi le ϵ - δ importe risquent de se sentir abandonnés. Il traite l'intégrale de Riemann, que les cours ultérieurs remplacent par l'intégrale de Lebesgue, si bien qu'une partie de l'effort fourni ici est dépassé. La deuxième édition de 1976 précède la pédagogie moderne — aucun outil d'intuition visuelle, aucune digression historique au-delà de ce que les théorèmes eux-mêmes véhiculent. L'analyse à plusieurs variables et la généralité des espaces métriques sont hors de propos : c'est l'analyse à une variable, faite avec soin, et pas grand-chose d'autre.

En une phrase

Un axiome supplémentaire — la complétude — suffit à transformer les règles du calcul en théorèmes que vous pouvez démontrer vous-même.

Pour qui

Les étudiants en mathématiques qui rencontrent l'analyse rigoureuse pour la première fois, et les autodidactes qui veulent voir les théorèmes du calcul démontrés plutôt qu'affirmés. Les enseignants d'analyse en premier cycle trouveront aussi l'échafaudage ϵ - δ d'une propriété rare.