

the emants of real analysis, second edition (1976)

by el Robert G.bartle · Language: DE

Summary by booksummaryai.com —

<https://booksummaryai.com/country/de/the-emants-of-real-analysis-second-edition-1976-zusammenfassung>

Summary

In 60 Sekunden

Bartle beginnt mit elf Axiomen und einem zusätzlichen—der Vollständigkeit—, das die reellen Zahlen von jedem minderwertigen Zahlensystem trennt. Aus dieser einen Eigenschaft gewinnt er die archimedische Regel, die Dichtheit der rationalen Zahlen, konvergente monotone Folgen und den Satz von Bolzano-Weierstrass. Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitungen und das Riemann-Integral bekommen jeweils eine ϵ - δ -Definition und einen Satz, den du mit eigenen Händen beweisen kannst. Das Buch endet bei Funktionenfolgen, wo die punktweise Konvergenz versagt und die gleichmäßige Konvergenz den Tag rettet.

Warum es sich lohnt

Das ist das Buch, das den Analysis aus einem Sack voller Tricks in ein Fach mit Begründungen verwandelt. Jeder Satz, den du aus dem Analysis-Grundkurs nur halb im Kopf hast—der Zwischenwertsatz, der Mittelwertsatz, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung—bekommt hier einen echten Beweis, gebaut auf der Vollständigkeit. Lies es, wenn du Mathematikstudent bist und in die Analysis gehst, wenn du Lehrer bist und wissen willst, warum die Regeln gelten, oder wenn du Autodidakt bist und dich mit einem 'es lässt sich zeigen' nicht abspeisen lässt.

Die Kernideen

Elf Axiome und eines, das mehr zählt als alle anderen

Du schlägst das Buch auf und triffst auf das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als einen Körper, dessen Addition und Multiplikation 11 Axiome erfüllen. Dann fügt Bartle das eine Axiom hinzu, das alles verändert—die Vollständigkeit, die Garantie, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge eine kleinste obere Schranke (Supremum) besitzt. Daraus beweist er die archimedische Eigenschaft: wenn $x > 0$ und y eine beliebige reelle Zahl ist, dann existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$. Wie klein x auch sei, genug Kopien davon überholen jedes y . Diesen Gewinn löst er sofort in ein zweites Resultat ein: zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen existiert eine rationale Zahl, wobei er die archimedische Eigenschaft benutzt, um einen Nenner n mit $1/n < b - a$ zu finden.

Die Vollständigkeit ist die tragende Wand der Analysis. Die elf Körper- und Ordnungsaxiome beschreiben Rechnen und Größe, aber sie gelten genauso für die rationalen Zahlen, wo Folgen wie die Dezimalentwicklung von 2 keinen Grenzwert haben. Das Supremumsaxiom ist es, das überhaupt erst die Existenz von Grenzwerten ermöglicht, und die archimedische Eigenschaft ist ihre erste Dividende: sie übersetzt 'beliebig klein' in einen konkreten Nenner, den du aufspüren kannst. Wenn du später beweist, dass Grenzwerte eindeutig sind oder dass Integrale existieren, lehnt du dich still auf dieses Kapitel.

Probier es aus: Wähle zwei reelle Zahlen, etwa $a = 1.4142$ und $b = 1.4143$, und finde tatsächlich eine rationale Zahl zwischen ihnen mit dem archimedischen Trick: wähle n mit $1/n < b - a$, dann bestimme eine ganze Zahl m mit $a < m/n < b$.

Monoton, beschränkt, fertig: dein erster Konvergenzsatz

Kapitel 2 schenkt dir den billigsten Konvergenztest des Buches. Eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist, konvergiert gegen ihr Supremum (und eine beschränkte fallende Folge konvergiert gegen ihr Infimum). Dann steigt der Einsatz. Das Kapitel führt Teilfolgen ein und beweist den Satz von Bolzano-Weierstrass über die Intervallschachtelungseigenschaft: jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so chaotisch sie auch sein mag, birgt in sich eine konvergente Teilfolge. Schließlich kommt das Cauchy-Kriterium für Konvergenz: eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, unter Verwendung der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Diese drei Resultate bilden einen Werkzeugkasten, den du für den Rest des Buches benutzen wirst. Der Satz von der monotonen Konvergenz erlaubt dir, Konvergenz zu beweisen, ohne den Grenzwert zu kennen—beschränke einfach die Folge und lass das Supremum die Arbeit tun. Bolzano-Weierstrass ist das Extraktionsprinzip: aus jedem beschränkten Durcheinander ziehst du einen wohlgeordneten Faden. Das Cauchy-Kriterium zählt am meisten, wenn der Grenzwert unbekannt ist oder in einem Raum lebt, den du nicht direkt sehen kannst; es prüft Konvergenz allein anhand der Glieder selbst. Alle drei sind Vollständigkeit in verschiedener Kleidung.

Probier es aus: Nimm die Folge $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$. Zeige, dass sie nach dem ersten oder zweiten Glied monoton ist, beschränke sie oben durch 2 und schließe, dass sie konvergiert—ohne jemals ihren Grenzwert zu berechnen.

ε - δ : die Definition, die dem Rätselraten ein Ende setzt

Bartle legt die ε - δ -Definition des Grenzwerts auf den Tisch: f hat den Grenzwert L in c , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass x nahe bei c $f(x)$ nahe bei L erzwingt. Das Beispiel $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ für $x \neq 1$ hat den Grenzwert 2 , wenn x gegen 1 geht, obwohl es bei 1 nicht definiert ist.

Die ε - δ -Definition kehrt das Kräfteverhältnis eines Analysis-Kurses um. Statt 'näht sich an', was bedeutet, was der Leser will, verlangt sie ein quantifiziertes Herausforderungsspiel: dein Gegner wählt ε , du antwortest mit δ . Wenn du immer antworten kannst, existiert der Grenzwert. Deshalb blockieren hebbare Unstetigkeiten und Lücken keine Grenzwerte, und deshalb definiert dieselbe Maschinerie später Stetigkeit, indem sie einfach verlangt, dass der Grenzwert gleich $f(c)$ ist.

Probier es aus: Beweise $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ mit der Definition: gegeben ε , zeige $\delta = \varepsilon/3$ und verifiziere die Implikation $|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 7| < \varepsilon$.

Stetigkeit, zusammengesetzt aus Grenzwerten

Die Stetigkeit erhält ihre präzise Form: f ist stetig in c , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $|x - c| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Es wird bewiesen, dass Summen, Produkte und Quotienten (bei nicht verschwindendem Nenner) stetiger Funktionen stetig sind. Der Lohn kommt in drei Sätzen. Der Zwischenwertsatz wird formuliert: Ist f stetig auf $[a, b]$ und k liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann existiert ein c in $[a, b]$ mit $f(c) = k$, bewiesen mit dem Supremum der Menge $\{x : f(x) \leq k\}$. Der Satz über die Beschränktheit wird bewiesen: Eine auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist auf diesem Intervall beschränkt. Der Satz über das Maximum-Minimum (Extremwertsatz) wird bewiesen: Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall nimmt ihre Maximum- und Minimumwerte an, unter Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstrass.

Abgeschlossen und beschränkt ist die Zauberformel dieses Kapitels. Die Beweise zeigen, warum sich die Vollständigkeit bezahlt macht – der Zwischenwertsatz beschwört den Punkt c aus einem Supremum herauf, und der Extremwertsatz erntet eine konvergente Teilfolge aus Bolzano-Weierstrass. Stetigkeit allein ist eine lokale Bedingung; erst die Kompaktheit von $[a, b]$ macht daraus eine globale Kontrolle.

Probier es aus: Zeige, dass $f(x) = 1/x$ auf $(0, 1]$ stetig, aber unbeschränkt ist, und erkläre dann genau, welche Voraussetzung des Beschränktheitsatzes verletzt ist.

Die Ableitung, ehrlich definiert

Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle c ist definiert als $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c))/h$, falls der Grenzwert existiert, und es wird bewiesen, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert. Dann das Herzstück des Kapitels. Der Satz von Rolle wird bewiesen: Ist f stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert ein c in (a, b) mit $f'(c) = 0$. Darauf folgt der Mittelwertsatz: Ist f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , dann existiert ein c in (a, b) mit $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$, bewiesen mit dem Satz von Rolle. Die Regel von L'Hospital (für den unbestimmten Ausdruck $0/0$) wird formuliert und mit dem Cauchyschen Mittelwertsatz bewiesen, mit dem Beispiel $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$, wobei der Beweis die Ableitung von $\sin$ an der Stelle 0 benutzt.

Der Mittelwertsatz ist die Brücke zwischen Lokalem und Globalem: Er verwandelt Information über eine Ableitung an einem unbekannten Punkt in eine Aussage über die mittlere Änderung über ein ganzes Intervall. Fast jede Ableitungsregel, die du benutzt – Monotonietests, Fehlerabschätzungen für Approximationen – ist der Mittelwertsatz in Verkleidung. Die Regel von L'Hospital ist keine Definition, sondern ein Satz mit Voraussetzungen, und ihr Beweis über den Cauchyschen Mittelwertsatz zeigt, warum die Regel Differenzierbarkeit in der Umgebung des Punktes braucht, nicht nur im Punkt selbst.

Probier es aus: Beweise mit dem Mittelwertsatz, dass $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ für alle reellen a, b gilt, und bestimme das c , dessen Existenz der Satz garantiert.

Das Riemann-Integral, von den Zerlegungen aufwärts

Kapitel 6 baut das Integral aus nackten Bestandteilen auf. Eine Zerlegung P von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; ihre Feinheit ist $|P| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$; eine Riemann-Summe ist $S(f; P) = \sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ für Marken t_i in $[x_{i-1}, x_i]$; und f ist Riemann-integrierbar, wenn es ein L gibt, sodass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Zerlegung P mit $|P| < \delta$ und beliebige Marken gilt: $|S(f; P) - L| < \varepsilon$. Es wird bewiesen, dass eine stetige Funktion auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist. Dann wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in beiden Teilen bewiesen: Ist F differenzierbar auf $[a, b]$ und $F' = f$ auf $[a, b]$ integrierbar, dann gilt $\int_a^b f = F(b) - F(a)$; und ist f stetig auf $[a, b]$, dann ist $F(x) = \int_a^x f$ differenzierbar auf $[a, b]$ und $F'(x) = f(x)$.

Die markenbasierte Definition ist robuster als die, die du in der Analysis-Vorlesung gesehen hast: Sie verlangt, dass ALLE Riemann-Summen mit feinen genug Zerlegungen nahe bei L landen, egal wo die Marken liegen. Deshalb ist der Satz 'stetig impliziert integrierbar' echter Gehalt – die Marken könnten sich verschwören, um die schlechtesten Punkte zu sampeln, und genau das verhindert die Stetigkeit. Die beiden Teile des Hauptsatzes zeigen in entgegengesetzte Richtungen: Der eine berechnet Integrale über Stammfunktionen, der andere erzeugt Ableitungen aus Integralen. Zusammen sagen sie, dass Differenzieren und Integrieren inverse Operationen sind – unter Voraussetzungen, die es zu prüfen lohnt.

Probier es aus: Berechne eine Riemann-Summe für $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$ mit der Zerlegung $\{0, 1/4, 1/2, 1\}$ und Marken an den linken Endpunkten, und vergleiche sie mit dem exakten Wert $1/3$.

Wenn Grenzwerte von Funktionen dich verraten

Hier zeigt das Buch dir ein Versagen. Das Beispiel $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$ wird angeführt, das für $x < 1$ punktweise gegen 0 und an $x = 1$ gegen 1 konvergiert, aber nicht gleichmäßig. Die Reparatur ist die gleichmäßige Konvergenz, definiert als: (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f auf A , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, sodass für alle $n \geq N$ und alle x in A gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Es wird bewiesen, dass der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen stetig ist und dass gleichmäßige Konvergenz die Vertauschung von Limes und Integral erlaubt. Für Reihen wird das Weierstraß-M-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen angegeben: wenn $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle x in A und $\sum M_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig auf A . Das Beispiel der Reihe $\sum x^n/n^2$ auf $[0, 1]$ wird angeführt, die nach dem M-Kriterium mit $M_n = 1/n^2$ gleichmäßig konvergiert, da $\sum 1/n^2$ konvergiert.

Punktweise Konvergenz lässt jeden Punkt nach seinem eigenen Zeitplan konvergieren; gleichmäßige Konvergenz erzwingt einen einzigen Zeitplan für alle. Dieser gemeinsame Zeitplan ist es, der dir die Vertauschung von Grenzwerten mit Stetigkeit und Integration erlaubt — das ε , das an einem Punkt funktioniert, funktioniert überall. Das M-Kriterium ist das Arbeitstier, weil es

eine Frage über Funktionen auf eine Frage über Zahlen reduziert, eine Reihe, die du mit dem Vergleichskriterium prüfen kannst. Behalte das x^n -Beispiel im Kopf: Es ist die kanonische Erinnerung daran, dass ein Limes schöner Objekte nicht schön sein muss.

Probier es aus: Für $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1/2]$: Finde ein explizites $N(\epsilon)$, das für alle x gleichzeitig funktioniert, und bestätige, dass die Konvergenz dort gleichmäßig ist, obwohl sie auf $[0,1]$ scheitert.

Potenzreihen und ihr Radius des Vertrauens

Das letzte Kapitel behandelt unendliche Polynome. Der Konvergenzradius R wird mit der Cauchy-Hadamard-Formel definiert: $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. Es wird bewiesen, dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzintervalls gliedweise differenziert werden kann und dass der Konvergenzradius der Ableitung derselbe ist.

Die gliedweise Differentiation ist das Resultat, das rechtfertigt, Potenzreihen wie Polynome zu behandeln, und es ist alles andere als offensichtlich: allgemeine Funktionenreihen lassen sich ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht gliedweise differenzieren. Die Cauchy-Hadamard-Formel verdient eine Pause, weil sie $\limsup$ verwendet, das Werkzeug aus Kapitel 2 — wenn gewöhnliche Grenzwerte von $|a_n|^{1/n}$ nicht existieren mögen, legt der $\limsup$ R dennoch exakt fest. Die gleichen Radien einer Reihe und ihrer Ableitung erklären auch, warum Funktionen wie e^x Reihen haben, die überall konvergieren: Differentiation verkleinert nie den Vertrauensbereich.

Probier es aus: Wende die Cauchy-Hadamard-Formel auf $\sum x^n/n!$ an, indem du $\limsup (1/n!)^{1/n} = 0$ berechnest, und schließe auf $R = \infty$; differenziere dann die Reihe gliedweise, um dieselbe Reihe zurückzugewinnen.

Die besten Zitate

- "if $x > 0$ and y is any real number, there exists a natural number n such that $nx > y$ " - The Archimedean Property
- " $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c))/h$ " - The derivative definition
- " $|P| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ " - Norm of a partition
- " $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$ " - Cauchy-Hadamard formula

Kritik

Das Buch ist ein Kind seiner Zeit: Die Aufgaben und der Text setzen Vertrautheit mit formalem Manipulieren voraus, und Leser, die Bilder, Anwendungen oder eine Motivation dafür suchen, warum ϵ - δ wichtig ist, könnten sich im Stich gelassen fühlen. Es behandelt das Riemann-Integral, das spätere Kurse durch das Lebesgue-Integral ersetzen, sodass ein Teil der hier geleisteten Arbeit überholt ist. Die zweite Auflage von 1976 stammt aus der Zeit vor der modernen Didaktik—keine visuelle Anschauungshilfe, keine historischen Einschübe über das hinaus, was

die Sätze selbst mit sich bringen. Mehrdimensionale Analysis und die Allgemeinheit metrischer Räume liegen außerhalb des Rahmens; das ist eindimensionale Analysis, sorgfältig gemacht und nicht viel mehr.

In einem Satz

Ein einziges zusätzliches Axiom—die Vollständigkeit—genügt, um aus den Regeln der Analysis Sätze zu machen, die du selbst beweisen kannst.

Für wen sich das Buch eignet

Mathematikstudenten, die zum ersten Mal auf strenge Analysis treffen, und Autodidakten, die die Sätze der Analysis bewiesen statt bloß behauptet haben wollen. Dozenten, die eine Einführung in die Analysis unterrichten, werden die ε - δ -Gerüst ebenfalls als ungewöhnlich sauber empfinden.